

Question 1 [3+3+5 points]

Voici le nombre X de ventes réalisées par les 5 vendeurs d’une agence au courant de la semaine dernière :

3 0 4 5 1

Déterminer chacun des indices suivants [choisir vos réponses dans la liste présentée plus bas] :

a) La moyenne arithmétique de X	Réponse : (A, B, ..., ou H) ► C
-----------------------------------	---

b) La médiane de X	Réponse : (A, B, ..., ou H) ► D
----------------------	---

c) La variance σ^2 de X	Réponse : (A, B, ..., ou H) ► E
----------------------------------	---

Choix de réponse [toutes les réponses sont présentées avec 3 décimales, en ordre croissant] :

A	B	C	D	E	F	G	H
1,855	2,074	2,600	3,000	3,440	4,000	4,300	Aucune des réponses proposées

Question 2 [3+3+5 points]

Voici la distribution d’une variable X :

x	1	7	9	
Fréquence	0,5	0,4	0,1	1

Déterminer chacun des indices suivants [choisir vos réponses dans la liste présentée plus bas] :

2-a) La moyenne arithmétique de X	Réponse : (A, B, ..., ou H) ► C
-------------------------------------	---

2-b) La médiane de X	Réponse : (A, B, ..., ou H) ► B
------------------------	---

2-c) La variance σ^2 de X	Réponse : (A, B, ..., ou H) ► E
------------------------------------	---

Choix de réponse [toutes les réponses sont présentées avec 3 décimales, en ordre croissant] :

A	B	C	D	E	F	G	H
3,520	4,000	4,200	5,280	10,560	11,556	17,333	Aucune des réponses proposées

Question 3 [5+5+7 points]

Un professeur d’université voudrait savoir s’il y a une relation entre les deux variables suivantes:

Y , le résultat obtenu par des étudiants à un examen d’une corporation professionnelle; et

X , la note moyenne obtenue aux examens officiels du secondaire par ces mêmes étudiants.

La variable X est interprétée comme une mesure de la «force» de l’élève lors de son admission à l’université.

Le professeur détermine les valeurs de X et de Y pour les **50** étudiants qui se sont présentés à l’examen professionnel cette année.

Il obtient les résultats suivants :

Y : Résultat à l’examen professionnel $\bar{y} = 65$	X : Moyenne aux examens officiels au secondaire $\bar{x} = 70$	$n = 50$ Covariance (corrigée) entre X et Y : $S_{xy} = 96,8$
Écart-type (corrigé) des Y : $S_y = 22$	Écart-type (corrigé) des X : $S_x = 11$	

3-a) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y

$$r = \frac{96,8}{(11)(22)} = 0,4$$

Coefficient de corrélation = 0,4

3-b) Déterminer la droite des moindres carrés qui permettra d'estimer Y (le résultat aux examens de la profession) à partir de X (la moyenne au secondaire.)

$$b = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = 0,8; \quad a = 65 - 0,8(70) = 9$$

Droite des moindres carrés : $y =$ 9 $+$ 0,8 x

3-c) Déterminer (à l'aide d'un calcul formel) laquelle des propositions suivantes peut être justifiée par les données.

Cocher

- A : La relation est forte dans l'échantillon, mais on ne peut quand même pas conclure avec confiance qu'il existe une relation au niveau de la population.
- B : La relation est très forte dans l'échantillon, ce qui permet de conclure avec confiance qu'il existe une relation dans la population.
- C : La relation n'est pas très forte au niveau de l'échantillon mais on peut quand même conclure avec confiance qu'il existe une relation au niveau de la population.
- D : La relation n'étant pas très forte dans l'échantillon, on ne peut pas conclure qu'il existe une relation dans la population.

Calculs

$$Z = \frac{\sqrt{n-2} r}{\sqrt{1-r^2}} = 3,03 > 2$$

Valeur sur laquelle la conclusion ci-dessus est basée : Z=3,02

Question 4 [Suite du numéro précédent] [7+7 points]

Les 150 étudiants de l'université B, voisine de l'université présentée au dernier numéro (l'Université A), obtiennent de meilleurs résultats : 72 % à l'examen de la profession. On se demande si cela est dû au fait que les étudiants de l'université B sont en moyenne plus «forts» (la «force» étant mesurée par la moyenne obtenue à des examens officiels au *secondaire*.) Car, en effet, leur moyenne au secondaire est de 72 %, 2 points de plus que ceux de l'université A. Voici quelques statistiques sur l'Université B :

Y : Résultat à l'examen professionnel $\bar{y}_2 = 72$	X : Moyenne aux examens officiels du secondaire $\bar{x}_2 = 72$	n = 150 Covariance (corrigée) entre revenu et solde : $S_{x_2y_2} = 64,8$
Écart-type (corrigé) des Y : $S_{y_2} = 20$	Écart-type (corrigé) des X : $S_{x_2} = 9$	

4-a) Déterminer la différence de moyenne (à l'examen de la profession) après ajustement pour tenir compte de la différence de force.

Droite de régression pour l'Université A : $y = 14,4 + 0,8x$

Moyenne globale au secondaire : $\bar{x} = \frac{50(70) + 150(72)}{200} = 71,5$

Moyenne ajustée à l'examen de la profession

Université A : $9 + 0,8(71,5)$

Université B : $14,4 + 0,8(71,5)$

Différence : 5,4

Différence non nulle mais inférieure à la différence des moyennes non ajustées

Différence (Université B – Université A) = **5,4**

4-b) Dire laquelle des conclusions suivantes pourrait être justifiée par les résultats que vous avez obtenus.

Cocher

- A - Les étudiants de l'Université B étaient plus forts au départ, mais cela n'a eu **aucun effet** sur leur résultats à l'examen de la profession.
- B - Les étudiants de l'Université B étaient plus forts au départ, et cela explique **en partie** mais pas entièrement la différence observée à l'examen de la profession.
- C - Les étudiants de l'Université B étaient plus forts au départ, et ce fait explique **entièrement** la supériorité de leur performance à l'examen de la profession
- D - On estime que si les étudiants de l'Université A étaient **aussi forts** que ceux de l'Université B, ils auraient eu une moyenne à l'examen de la profession **supérieure** à celle des étudiants de l'Université B.
- E - On estime que si les étudiants de l'Université A étaient **aussi forts** que ceux de l'Université B, ils auraient eu à peu près **la même** moyenne que ceux de l'Université B

Question 5 [5 points]

Dans chacun des cas suivants, on décrit une expérience et deux variables aléatoires, X et Y . Dites lesquelles des paires P1, P2 et P3 de variables $(X; Y)$ sont **dépendantes**.

[Faites votre choix dans la liste présentée plus bas.]

P1. On tire au hasard un compte de dépenses parmi ceux soumis en septembre :

X : Le montant de dépenses en nourriture

Y : Le montant de dépenses en hôtellerie

P2. On tire au hasard et *sans* remise deux comptes de dépenses parmi les 25 soumis en septembre :

X : Montant total des dépenses dans le premier compte

Y : Montant total des dépenses dans le deuxième compte

P3. On tire au hasard et *avec* remise deux comptes de dépenses parmi les 25 soumis en septembre :

X : Montant total des dépenses dans le premier compte

Y : Montant total des dépenses dans le deuxième compte

Choix de réponse :

Les paires **dépendantes** sont [Encercler un seul des choix suivants] :

- Aucune P1 P2 P3 **P1 et P2** P1 et P3 P2 et P3 Toutes

Question 6 [6+6+6+6+6+6 points]

Un inspecteur est chargé de retirer les bouteilles endommagées sortant d'une chaîne d'embouteillage. On sait qu'en moyenne **20 %** des bouteilles issues de cette chaîne sont défectueuses.

Déterminer chacune des quantités suivantes [choisir vos réponses dans la liste présentée plus bas] :

a)	Var(X) où X = le nombre bouteilles endommagées parmi les 5 premières inspectées	Réponse : (A, B, ..., ou P) ►	I
b)	Var(Y) où Y = le nombre de bouteilles endommagées parmi 5 bouteilles tirées au hasard dans un paquet de 12 bouteilles dont 3 sont endommagées.	Réponse : (A, B, ..., ou P) ►	G
c)	Var(Z) où Z = Le nombre de bouteilles observées par l'inspecteur au moment où il découvre la première bouteille endommagée de la journée	Réponse : (A, B, ..., ou P) ►	O
d)	La probabilité de trouver au moins 2 bouteilles endommagées parmi les 5 premières inspectées	Réponse : (A, B, ..., ou P) ►	C
e)	La probabilité de trouver deux bouteilles endommagées parmi 5 bouteilles tirées au hasard dans un paquet de 12 bouteilles dont 3 sont endommagées.	Réponse : (A, B, ..., ou P) ►	E
f)	Var(U) où U = Le nombre de paquets de 6 bouteilles qui ne contiennent aucune bouteille endommagée parmi 5 paquets [supposer que les bouteilles dans ces paquets n'avaient pas été inspectées].	Réponse : (A, B, ..., ou P) ►	L
g)	$P(U=2)$ où U est tel que défini en f)	Réponse : (A, B, ..., ou P) ►	D

Choix de réponse [toutes les réponses sont présentées avec 3 décimales, en ordre croissant] :

A	B	C	D	E	F	G	H
0,058	0,205	0,263	0,276	0,318	0,442	0,597	0,737
I	J	K	L	M	N	O	P
0,800	0,833	0,942	0,967	1,000	1,200	20	25

Table de la loi normale

Surfaces à gauche du point z

z	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
-4,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-3,90	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-3,80	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,70	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,60	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
-3,50	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,40	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,30	0,0003	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0005
-3,20	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0007	0,0007
-3,10	0,0007	0,0007	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0009	0,0009	0,0009	0,0010
-3,00	0,0010	0,0010	0,0011	0,0011	0,0011	0,0012	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013
-2,90	0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0018	0,0018	0,0019
-2,80	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026
-2,70	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
-2,60	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047
-2,50	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060	0,0062
-2,40	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	0,0082
-2,30	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107
-2,20	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139
-2,10	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179
-2,00	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228
-1,90	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287
-1,80	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359
-1,70	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446
-1,60	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548
-1,50	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668
-1,40	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	0,0808
-1,30	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	0,0968
-1,20	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1056	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151
-1,10	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357
-1,00	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
-0,90	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
-0,80	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
-0,70	0,2148	0,2177	0,2206	0,2236	0,2266	0,2296	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
-0,60	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
-0,50	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
-0,40	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
-0,30	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
-0,20	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
-0,10	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
0,00	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000

Table de la loi normale

Surfaces à gauche du point z

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,10	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,20	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,30	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,40	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,50	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,60	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,70	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,80	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,90	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Formulaire MAT2080 Examen Intra

1 Moyenne arithmétique : $\bar{y} = (1/n) \sum_{i=1}^n y_i$
pour une série de données et

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p y_i n_i = \sum_{i=1}^p y_i f_i$$

pour une distribution

2 Variance :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}$$

pour une série de données et

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^p (y_i - \bar{y})^2 f_i$$

pour une distribution.

Écart-type : racine carrée de la variance.

3 Écart-type corrigé :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sigma.$$

4 Covariance : $\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$;
covariance corrigée :

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

5 Coefficient de corrélation :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}.$$

6 Coefficients de la droite des moindres carrés :

$$b_1 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

7 $\hat{\sigma}_{y,x} = \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} s_y \sqrt{1-r^2}$; $\hat{\sigma}_{b_1} = \frac{\hat{\sigma}_{y,x}}{\sqrt{n-1} s_x}$

8 Intervalle de confiance pour β_1 :

$$b_1 - 2 \hat{\sigma}_{b_1} \leq \beta_1 \leq b_1 + 2 \hat{\sigma}_{b_1}$$

9 Statistique pour tester l'indépendance de deux variables quantitatives :

$$Z = \frac{\sqrt{n-2} r}{\sqrt{1-r^2}}$$

10 Espérance mathématique d'une variable aléatoire X : $E(X) = \mu = \sum_x x p(x)$.

11 Variance d'une variable aléatoire X :

$$\text{Var}(X) = \sum_x (x - \mu_X)^2 p(x).$$

12 Lois discrètes

Distribution	Modalités de X	$Pr(X = x)$	$E(X)$	$Var(X)$
Binomiale $\mathfrak{B}(n; p)$	$x \in \{0, 1, \dots, n\}$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
Poisson $\mathfrak{P}(\lambda)$	$x \in \{0, 1, 2, \dots\}$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$	λ	λ
Hypergéométrique $\mathfrak{H}(n; N_1; N_2)$	$0 \leq x \leq N_1$ $0 \leq n-x \leq N_2$	$\frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$np,$ $p = \frac{N_1}{N}$	$npq \frac{N-n}{N-1},$ $q = 1-p$
Géométrique $\mathfrak{G}(p)$	$x \in \{1, 2, \dots\}$	$pq^{x-1}, q = 1-p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomiale négative $\mathfrak{B}^-(n; p)$	$x \in \{n, n+1, n+2, \dots\}$	$\binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}$	$\frac{n}{p}$	$\frac{nq}{p^2}$
Multinomiale $\mathfrak{M}(n; p_1, \dots, p_k)$	$x_i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$	$\binom{n}{x_1, \dots, x_k} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$	$E(X_i) = np_i$	$\text{Var}(X_i) = np_i(1-p_i)$

13 Soit $X \sim \mathfrak{B}(n, p)$, $n > 30, np > 5, nq > 5$. Alors $X \sim \mathfrak{N}(np; npq)$, approximativement.

